

# Eine Bemerkung über positiv definite quadratische Formen und rationale Punkte

von Nikolay Moshchevitin<sup>1</sup> (Moskau)

## 1. Resultate über rationale Punkte.

Sei

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n f_{i,j} x_i x_j, \quad f_{i,j} = f_{j,i}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

eine positiv definite quadratische Form mit ganzen Koeffizienten. Für die Form  $f$  betrachten wir eine indefinite Form

$$F(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) - y^2$$

in  $n + 1$  Variablen  $\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  und den Körper

$$\mathfrak{S}_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| < 1\},$$

dessen Volumen wir durch  $\mathfrak{v}_f$  bezeichnen.

Wir erinnern uns, dass eine quadratische Form  $Q(\mathbf{z})$  isotrop heißt, wenn ein Gitterpunkt  $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$  mit  $Q(\mathbf{g}) = 0$  existiert.

In der vorliegenden Note werden wir folgende Behauptung zeigen.

**Satz 1.** *Sei*

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1.$$

*Definieren wir die Konstante*

$$\kappa_f = 6 \max \left\{ 1, \frac{(n+1)^{2(n+1)} \cdot 6^{2n} \cdot 2^{2n^2}}{\mathfrak{v}_f^{2(n+1)}} \right\}$$

*Falls die Form  $F(\mathbf{z})$  isotrop ist, gibt es für jedes  $T \geq 1$  einen rationalen Punkt*

$$\mathbf{r} = \left( \frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_n}{q} \right), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

*mit den folgenden Eigenschaften:*

$$1 \leq q \leq T,$$

$$f(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}) = f\left(\alpha_1 - \frac{a_1}{q}, \dots, \alpha_n - \frac{a_n}{q}\right) \leq \frac{\kappa_f}{qT} \tag{1}$$

und

$$f(\mathbf{r}) = f\left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_n}{q}\right) = 1.$$

---

<sup>1</sup> unterstützt durch RFBR 15-01-05700a.

Diese Behauptung ist eine effektive Version eines hübschen Satzes von Fishman, Kleinbock, Merrill und Simmons [7]. Kleinbock und Merrill [6] hatten vor kurzem das Resultat des Satzes 1 für die einfachste positive Form

$$f_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (2)$$

bewiesen, ohne eine explizite Konstante in (1). Ein allgemeines Ergebnis war später von Fishman, Kleinbock, Merrill und Simmons [6] bewiesen werden. Sie hatten keine explizite Konstante auch und sie benutzten die Methoden der Theorie Dynamischer Systeme.

Hier geben wir einen kurzen Beweis des Satzes 1, der nur den Satz von Minkowski über die sukzessiven Minima und einen Nullstellensatz für die isotropen Form von Cassels [3] verwendet. Dieser Nullstellensatz wurde 1955 von Cassels [1] bewiesen (siehe auch die Arbeit von Davenport [4]). Birch und Davenport [1], Schlickewei [9], Schulze-Pillot [12], Schlickewei und Schmidt [10,11] haben dieses Resultat verallgemeinert. Eine interessante Übersicht wurde von Fukshansky [5] geschrieben. Ein kurzer Beweis des Satzes 1 für  $f_0$  in dem Fall  $n = 3$  wurde in [8] gegeben.

Ältere Resultate über die Approximation von Punkten auf der quadratischen Fläche durch rationale Punkte der Fläche sind in dem Buch von Cassels ([3], Kap. 6, § 8, 9) besprochen.

## 2. Quadratische Form und Automorphismen.

Wir brauchen die einfachste Form (2) und die entsprechende Form

$$F_0(\mathbf{z}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - y^2.$$

Wir betrachten die Kugel

$$\mathfrak{S} = \{\mathbf{x} : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

mit dem Volumen  $\mathfrak{o}_n = \text{vol} \mathfrak{S}$ .

Wir brauchen auch die indefinite Form

$$F_1(\mathbf{w}) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \xi\eta$$

in  $n + 1$  Variablen  $\mathbf{w} = (x_1, \dots, x_{n-1}, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Es ist klar, dass

$$F_0(\mathbf{z}) = F_1(\mathcal{B}\mathbf{z})$$

mit

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Form  $F_0$  hat eine Familie der Automorphismen

$$\mathcal{D}_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

so dass

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{D}_t \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) & \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) & \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{pmatrix}, \quad ,$$

Automorphismen der Form  $F_0$  sind:

$$F_0(\mathcal{G}_t \mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}), \quad \forall t \forall \mathbf{z}.$$

Für einen Punkt  $\beta \in \mathfrak{S}$  können wir eine orthogonale Matrix  $R_\beta$  finden, für die gilt

$$\beta = R_\beta \mathbf{e},$$

wo  $\mathbf{e} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1)^T$ . Es ist klar, dass  $R_\beta$  ein “abstandserhaltenden Automorphismus” der Form  $F_0$  ist, der den euklidischen Abstand zwischen Punkten bewahrt.

Wir definieren die Punkte

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und die Matrizen

$$\mathcal{W}_f = \begin{pmatrix} W_f \text{ } n \times n & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\beta = \begin{pmatrix} R_\beta \text{ } n \times n & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{W}_f \bar{\boldsymbol{\beta}}, \quad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathcal{R}_\beta \bar{\mathbf{e}} \quad (4)$$

und

$$t \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathcal{R}_\beta \mathcal{G}_t \bar{\mathbf{e}}. \quad (5)$$

Wir betrachten den Zylinder

$$\mathfrak{K} = \{ \mathbf{z} = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < 1, x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1 \}$$

mit dem Volumen  $\text{vol } \mathfrak{K} = 2\mathbf{o}_n$ . Sei  $\mathfrak{K}_f(\boldsymbol{\alpha}, t) = \mathcal{W} \mathcal{R}_{\beta(\boldsymbol{\alpha})} \mathcal{G}_t \mathfrak{K}$ . Wegen

$$\mathfrak{K} \subset \{ \mathbf{z} : |F_0(\mathbf{z})| < 1 \},$$

$$F_0(\mathcal{R}_\beta \mathbf{z}) = F_0(\mathcal{G}_t \mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}), \quad F(W \mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x}), \quad (6)$$

haben wir

$$\mathfrak{K}_f(\boldsymbol{\alpha}, t) \subset \{ \mathbf{z} : |F(\mathbf{z})| < 1 \}. \quad (7)$$

Wir bemerken, dass

$$\text{vol } \mathfrak{K}_f(\boldsymbol{\alpha}, t) = |\det W_f| \cdot \det R_{\beta(\boldsymbol{\alpha})} \cdot \det \mathcal{G}_t \cdot 2\mathbf{o}_n = |\det W_f| \cdot 2\mathbf{o}_n = 2\mathbf{v}_f. \quad (8)$$

### 3. Sukzessive Minima.

Wir betrachten die sukzessiven Minima  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq n+1$  des Körpers  $\mathfrak{K}_f(\alpha, t)$ . Aus dem Satz von Minkowski folgt

$$\lambda_1^n \lambda_{n+1} \leq \lambda_1 \cdots \lambda_{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{\text{vol } \mathfrak{K}_f(\alpha, t)},$$

sodass

$$\lambda_{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{\lambda_1^n \cdot \text{vol } \mathfrak{K}_f(\alpha, t)} = \frac{2^n}{\lambda_1^n \cdot \mathfrak{v}_f}. \quad (9)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

**Fall 1.** Sei  $\lambda_1 < 1$ . In diesem Fall existiert ein Gitterpunkt  $\mathbf{g} \in \mathfrak{K}_f(\alpha, t)$ ,  $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ . Aber  $F(\mathbf{g})$  ganzzahlig ist, sodass aus (7) folgt  $F(\mathbf{g}) = 0$ .

**Fall 2.** Sei  $\lambda_1 \geq 1$ . Dann aus (9) folgt

$$\lambda_{n+1} \leq \frac{2^n}{\mathfrak{v}_f}. \quad (10)$$

In diesem Fall existieren unabhängig Gitterpunkte

$$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n+1} \in \lambda_{n+1} \overline{\mathfrak{K}_f(\alpha, t)}. \quad (11)$$

Die Form  $F$  ist isotrop und darum die Form

$$Q(\xi) = F(\xi_1 \mathbf{g}_1 + \dots + \xi_{n+1} \mathbf{g}_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} Q_{i,j} \xi_i \xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

ist isotrop auch. Dann Hilfssatz 8.1 aus Kap. 6 [3] gibt einen Gitterpunkt  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $Q(\zeta) = 0$  und

$$\max_{1 \leq j \leq n+1} |\zeta_j| \leq \left( 3 \sum_{1 \leq i,j \leq n+1} |Q_{i,j}| \right)^{n/2}. \quad (12)$$

Aber

$$Q_{j,j} = F(\mathbf{g}_j), \quad Q_{i,j} = \frac{1}{2} (F(\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j) - F(\mathbf{g}_i) - F(\mathbf{g}_j)), \quad i \neq j$$

Aus (11) folgt  $\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j \in 2\lambda_{n+1} \overline{\mathfrak{K}_f(\alpha, t)}$ , sodass liefern (11) und (7)

$$|F(\mathbf{g}_j)| \leq \lambda_{n+1}^2, \quad |F(\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j)| \leq 4\lambda_{n+1}^2,$$

und darum

$$\max_{1 \leq i,j \leq n+1} |Q_{i,j}| \leq 3\lambda_{n+1}^2. \quad (13)$$

Sei

$$\mathbf{g} = \zeta_1 \mathbf{g}_1 + \dots + \zeta_{n+1} \mathbf{g}_{n+1}.$$

Dann  $F(\mathbf{g}) = 0$  und aus (10), (11), (12) und (13) folgt

$$\mathbf{g} \in (n+1)^{n+1} 3^n \lambda_{n+1}^{n+1} \mathfrak{K}_f(\alpha, t) \subset \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 6^n \cdot 2^{n^2}}{\mathfrak{v}_f^{n+1}} \mathfrak{K}_f(\alpha, t).$$

In beiden Fällen existiert ein Gitterpunkt

$$\mathbf{g} = (a_1, \dots, a_n, q) \in C_f \mathfrak{K}_f(\alpha, t) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad C_f = \max \left\{ 1, \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 6^n \cdot 2^{n^2}}{\mathfrak{v}_f^{n+1}} \right\} \quad (14)$$

mit  $F(\mathbf{g}) = 0$ .

#### 4. Beweis des Satzes 1.

Sei

$$t = \frac{2T}{3C_f}.$$

Betrachten wir den Gitterpunkt  $\mathbf{g}$  aus (14). Wir definieren die Punkte

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n, q) = \mathcal{W}_f^{-1} \mathbf{g} \in \mathcal{R}_{\beta(\alpha)} \mathcal{G}_t C_f \mathfrak{K}, \quad \mathbf{g} = \mathcal{W}_f \mathbf{u}; \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n, q) = \mathcal{R}_{\beta(\alpha)}^{-1} \mathbf{u} = \mathcal{R}_{\beta(\alpha)}^{-1} \mathcal{W}_f^{-1} \mathbf{g} \in \mathcal{G}_t C_f \mathfrak{K}, \quad \mathbf{u} = \mathcal{R}_{\beta(\alpha)} \mathbf{v}; \quad (16)$$

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) = \mathcal{G}_t^{-1} \mathbf{v} = \mathcal{G}_t^{-1} \mathcal{R}_{\beta(\alpha)}^{-1} \mathbf{u} = \mathcal{G}_t^{-1} \mathcal{R}_{\beta(\alpha)}^{-1} \mathcal{W}_f^{-1} \mathbf{g} \in C_f \mathfrak{K}, \quad \mathbf{v} = \mathcal{G}_t \mathbf{w}; \quad (17)$$

so

$$\begin{aligned} w_j &= v_j, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ w_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) v_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) q, \\ w_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) v_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) q \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{w}) &= F_0(\mathbf{v}) = v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + v_n^2 - q^2 = \\ &= v_0^2 + \dots + v_{n-1}^2 + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) v_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) q \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) v_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + t \right) q \right)^2. \end{aligned}$$

Wegen  $\mathbf{w} \in C_f \mathfrak{K}$ , gilt  $|w_n|, |w_{n+1}| < C_f$  und  $|w_n + w_{n+1}| < 2C_f$ ,  $|w_n - w_{n+1}| < 2C_f$ . Daher ist

$$|q - v_n| < \frac{2C_f}{t}, \quad (18)$$

und

$$|q + v_n| < 2C_f t, \quad (19)$$

Aus (18), (19) folgt

$$2q = q + v_n + q - v_n < \frac{2C_f}{t} + 2C_f t < 3C_f t,$$

oder

$$q \leq \frac{3C_f t}{2} = T. \quad (20)$$

Aus (3), (15), (4), (16) und (6) folgt

$$F(\mathbf{g} - q\bar{\alpha}) = F(\mathcal{W}_f(\mathbf{u} - q\bar{\beta})) = F_0(\mathbf{u} - q\bar{\beta}) = F_0(\mathcal{R}_{\beta(\alpha)}(\mathbf{v} - q\bar{\epsilon})) = F_0(\mathbf{v} - q\bar{\epsilon}) = v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + (v_n - q)^2.$$

Aber  $v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + v_n^2 - q^2 = F_0(\mathbf{v}) = F(\mathbf{g}) = 0$ . Daraus folgt

$$|F(\mathbf{g} - q\bar{\alpha})| = |v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + (v_n - q)^2| = |q^2 - v_n^2 + (v_n - q)^2| = |2q(q - v_n)| < \frac{4C_f q}{t}. \quad (21)$$

(In der letzten Ungleichung verwenden wir (18).) Für den rationalen Punkt  $\mathbf{r} = \left( \frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_n}{q} \right) \in \mathbb{Q}^n$  folgt

$$f(\alpha - \mathbf{r}) \leq \frac{6C_f^2}{qT}. \quad (22)$$

Nun haben wir (20) und (22), und Satz 1 bewiesen ist.

## 5. Linear unabhängige Lösungen.

Das folgende Ergebnis wurde 1983 von Schulze-Pillot [12] gezeigt (seht auch Folgerung 1 aus [11]):

Sei

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^m Q_{i,j} \xi_i \xi_j, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$$

eine isotrope quadratische Form mit ganzrationalen Koeffizienten. Dann gibt es linear unabhängige ganzzahlige Punkte  $\boldsymbol{\zeta}^k = (\zeta_1^k, \dots, \zeta_m^k)$ ,  $1 \leq k \leq m$  mit  $Q(\boldsymbol{\zeta}^k) = 0$  und mit

$$\prod_{k=1}^m \max_i |\zeta_i^k| \leq c_m \left( \max_{i,j} |Q_{i,j}| \right)^{\frac{m^2}{2}-1},$$

wobei  $c_m > 0$  eine effektive Konstante ist.

Aus diesem Ergebnis folgt:

**Satz 2.** Sei  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ . Falls die Form  $F(\mathbf{z})$  isotrop ist, gibt es eine effektive Konstante  $\kappa_f^* > 0$  mit den folgenden Eigenschaften. Für jedes  $T \geq 1$  gibt es  $(n+1)$  unabhängige ganzzahlige Punkte

$$(a_1^k, \dots, a_n^k, q^k) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \quad 1 \leq k \leq n+1$$

mit  $1 \leq q^k \leq T$ ,  $f\left(\alpha_1 - \frac{a_1^k}{q^k}, \dots, \alpha_n - \frac{a_n^k}{q^k}\right) \leq \frac{\kappa_f^*}{q^{kT}}$  und  $f\left(\frac{a_1^k}{q^k}, \dots, \frac{a_n^k}{q^k}\right) = 1$ .

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 1.

Der Autor dankt Prof. O.N. Deutscher für die fruchtbare Diskussion und Prof. C. Elsholtz für sprachliche Hinweise.

## Literaturverzeichnis

- [1] B. J. Birch, H. Davenport, *Quadratic equations in several variables*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **54**:2 (1958), 135 - 138.
- [2] J. W. S. Cassels, *Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **51**:2 (1955), 262 - 264.
- [3] J. W. S. Cassels, *Rational Quadratic Forms*, Academic Press, 1978.
- [4] H. Davenport, *Note on a theorem of Cassels*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**:2 (1957), 539 - 540.
- [5] L. Fukshansky, *Heights and quadratic forms: Cassels' theorem and its generalizations*, in *Diophantine methods, lattices, and arithmetic theory of quadratic forms*, Contemp. Math., **587**, Ammer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, 77 - 94.
- [6] L. Fishman, D. Kleinbock, K. Merrill, D. Simmons, *Intrinsic Diophantine approximation on manifolds*, preprint verfügbar unter arXiv:1405.7650v4[math.NT] 24 Sep 2015.
- [7] D. Kleinbock, K. Merrill, *Rational approximation on Spheres*, preprint verfügbar unter arXiv:1301.0989v4[math.NT] 25 May 2013, erscheint in Israel Math. J.
- [8] N. Moshchevitin, *Über die rationalen Punkte auf der Sphäre*, erscheint in Monatshefte für Mathematik (2015), DOI 10.1007/s00605-015-0818-4.
- [9] H.P. Schlickewei, *Kleine Nullstellen homogener quadratischer Gleichungen*, Monatshefte für Mathematik, **100** (1985), 35 - 45.
- [10] H.P. Schlickewei, W.M. Schmidt, *Quadratic Forms Which Have Only Large Zeros I*, Monatshefte für Mathematik, **105** (1988), 295 - 311.

- [11] H.P. Schlickewei, W.M. Schmidt, *Isotrope Unterräume rationaler quadratischer Formen*, Mathematische Zeitschrift, **201** (1989), 191 - 208.
- [12] R. Schulze-Pillot, *Small linearly independent zeros of quadratic forms*, Monatshefte für Mathematik, **95** (1983), 24 - 249.